Anwendungsaufgaben in der Analysis

Kostenfunktionen
- aus der Wirtschaftsmathematik -

Sammlung von Aufgaben

Die Berechnungen werden in der Regel mit CAS-Rechnern durchgeführt, wobei …

Texas Instruments TI Nspire und

CASIO ClassPad 300 verwendet werden.

Datei - Nr. 49313

Friedrich Buckel

6. Mai 2013

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Aufgabe 1

(ähnlich zu Beispiel 5 in 49311/49312)

Die Radelgut KG produziert Fahrräder, maximal 1800 pro Woche. Man hat herausgefunden, dass die Verkaufsfunktion (Nachfragefunktion) linear ist und kennt diese Daten:

Bei einem Preis von 1000 € sind sie unverkäuflich, bei einem Preis von 600 € können 1200 Räder verkauft werden. Ferner gehorchen die Produktionskosten dieser Funktion:

$$K(x) = \frac{1}{3200}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 600x + 50.000.$$

a) Stelle die Nachfragefunktion und die Verkaufs(preis)funktion auf. Gib zwei Zahlenbeispiele zur Nachfragefunktion an.

b) Überprüfe, ob die Kostenfunktion Extremwerte und Wendepunkte besitzt.
Interpretiere diese Punkte für die Kostenfunktion (Beschreibe die Kostenentwicklung in den Bereichen $x < 800$ und $800 < x < 1800$).

c) Berechne die Stückkostenfunktion und das Betriebsoptimum. Wie viel kostet die Herstellung eines Fahrrads beim Betriebsoptimum und wie teuer wird die ganze Produktion für den Betrieb?

d) Berechne die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion. Berechne die Gewinnzone. Berechne den minimalen Erlös und den zugehörenden Verkaufspreis und Gewinn.
Wie viel Prozent beträgt der Unterschied zwischen dem Gewinn bei maximalem Erlös und dem maximalen Gewinn?

e) Was ist der Cournotsche Punkt? Erkläre seine Bedeutung und gib alle zugehörigen Daten an.

Zwei Lösungen: Mit **TI Nspire** bzw. mit **CASIO ClassPad**.

Lösung Aufgabe 1

1. Lösung: Manuell mit begleitenden Screenshots von CASIO ClassPad

a) Bestimmung der Nachfragefunktion.

Laut Aufgabe ist sie linear, es gilt also macht man diesen Ansatz:

$$n(p) = a \cdot p + b$$

Zur Bestimmung von m und n haben wir zwei Vorgaben zum Einsetzen:

$n(1000) = 0$:	$a \cdot 1000 + b = 0$	(1)
$n(600) = 1200$	$a \cdot 600 + b = 1200$	(2).
(1) – (2):	$400 \cdot a = -1200 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3$	
Aus (1):	$b = -1000 \cdot m = -1000 \cdot (-3) = 3000$	

Ergebnis: Verkaufsfunktion (Nachfragefunktion): $\mathbf{n(p) = -3p + 3000}$

Zahlenbeispiele dazu:

p = 600 €:	$n(600) = -3 \cdot 600 + 3000 = -1800 + 3000 = 1200$
p = 1000 €:	$n(1000) = -3 \cdot 1000 + 3000 = 0$
$p = 300$ €	$n(300) = -3 \cdot 300 + 3000 = 2100$

WISSEN: **Die Verkaufspreisfunktion ist die Umkehrfunktion zur Nachfragefunktion**:

Wir stellen also die Nachfragefunktion nach p um:

$$n(p) = -3 \cdot p + 3000 \quad \Leftrightarrow \quad 3p = 3000 - n \quad \Leftrightarrow \quad p = 1000 - \tfrac{n}{3}$$

Oder in anderer Bezeichnung: $\boxed{p(x) = 1000 - \tfrac{1}{3}x}$

b) Extrem- und Wendepunkte der Kostenfunktion:

Kostenfunktion: $K(x) = \frac{1}{3200}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 600x + 50.000$

Ableitungen: $K'(x) = \frac{3}{3200}x^2 - \frac{3}{2}x + 600$

$K''(x) = \frac{3}{1600}x - \frac{3}{2}$

<u>**Berechnung der Extrempunkte**</u>: $K'(x) = 0$

$$\frac{3}{3200}x^2 - \frac{3}{2}x + 600 = 0 \qquad \Big| \cdot \frac{3200}{3}$$

$$x^2 - 1600\,x + 640.000 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1600 \pm \sqrt{1600^2 - 4 \cdot 640.000}}{2} = \frac{1600 \pm 0}{2} = 800$$

Einzige Lösung x = 800.

Kontrolle: $K''(800) = 0$

Das heißt: Verdacht auf Wendepunkt. $K'''(800) = \frac{3}{1600} \neq 0$

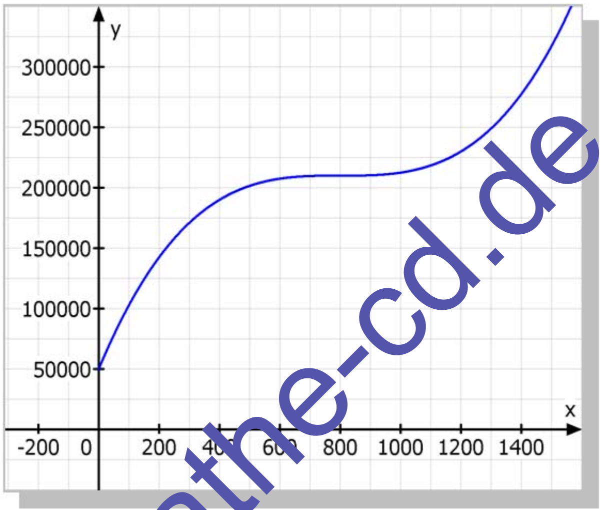
Es gibt keine Extrempunkte, denn es liegt ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente vor, also ein Terrassenpunkt: $W(800 \mid 210.000)$

<u>Gibt es weitere Wendepunkte</u>?

Bedingung: $K''(x) = 0$ d. h. $\frac{3}{1600}x - \frac{3}{2} = 0$

Diese lineare Gleichung hat nur eine Nullstelle x = 800.

Nebenstehende Kurve zeigt die Kostenfunktion.
Für $x < 800$ steigt K streng monoton mit Rechtskrümmung, d.h. mit abnehmendem Wachstum (Rechtskurve!), d.h. die Kostenzunahme nimmt ab.
Für $800 < x < 1800$ haben wir progressives Wachstum: Steigende Kosten, und die Kostenzunahme nimmt zu. (Linkskrümmung!)



Dieselbe Berechnung mit CASIO ClassPad, dazu die grafische Darstellung der Kostenfunktion.